13/01/2020

Διαδικασία γεννήσεων - θανάτων

Θεωρούμε μια σ.δ σε συνεχή χρόνο
$\{X(t) : 0 \leq t < +\infty\}$ και με τιμές στον μη αρνητικό ημιάξονα των ακεραίων δηλαδή $\{0,1,2,\dots\}$

$$P_{ij}(t) = P\left[X(t+u)=j \mid X(u)=i\right]$$

• ΚΑΝΟΝΕΣ

→ Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n $(n=0,1,2\dots)$ τη χρονική στιγμή t, η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $n+1$ τη χρονική στιγμή $t+dt$, όπου dt: μεταβολή του χρόνου.

$\boxed{P_{n\,n+1}(dt) = \lambda_n dt + O(dt)}$, (ΓΕΝΝΗΣΗ)

όπου: λ_n: θετική παράμετρος (ρυθμός γεννήσεων) που εξαρτάται από το n

$O(dt)$: όροι μικροί σε σχέση με το dt τ.ω. $\lim_{dt \to 0} \frac{O(dt)}{dt} = 0$

→ Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n $(n=1,2,3\dots)$ τη χρονική στιγμή t, η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $n-1$ τη χρονική στιγμή $t+dt$ όπου dt: μεταβολή του χρόνου.

$\boxed{P_{n\,n-1}(dt) = \mu_n dt + O(dt)}$ (ΘΑΝΑΤΟΣ)

όπου: μ_n: ρυθμός θανάτων, μη αρνητική παράμετρος που εξαρτάται από το n

→ Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n τη χρονική στιγμή t η πιθανότητα ο συνολικός αριθμός γεννήσεων-θανάτων που θα συμβούν στο διάστημα $t+dt$ να είναι μεγαλύτερος του 1 είναι $O(dt)$

t	$t+dt$
n	$n+1$
	$n-1$
	άλλου

$j \neq n, n+1, n-1$ $\boxed{P_{nj}(dt) = O(dt)}$

$n \neq 0$. $P_{nn}(dt) = P$(ούτε γέννηση ούτε θάνατος)

$$= 1 - [\mu_n dt + \lambda_n dt + O(dt)]$$

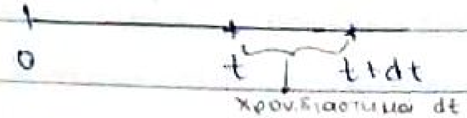
για $n=0$: $\boxed{P_{00}(dt) = 1 - [\lambda_0 dt + O(dt)]}$

$P_{n\,n+1}$ ΓΕΝΝΗΣΗ

Ερώτημα: Έστω τη χρονική στιγμή μηδέν η κατάσταση της διαδικασίας γεννήσεων θανάτων είναι

$X(0)=i$ $\quad P_{in}(t) = P[X(t)=n \mid X(0)=i]$

(για απλούστευση $P_n(t)$)



$n-1 \to n$
$n \to n$ $\quad$ ισχύει για $n=1,2,3\ldots$
$n+1 \to n$

$P_n(t+dt) = P$(να βρεθεί στην κατάσταση $n-1$ τη χρονική στιγμή t $\cap$ (και) να πάει στην n σε dt)

ή $+$

P(να βρεθεί στην κατάσταση n τη χρονική στιγμή t $\cap$ (και) να πάει στη n σε dt)

ή $+$

P(να βρεθεί στην κατάσταση $n+1$ τη χρονική στιγμή t $\cap$ (και) να πάει στη n σε dt)

(ξένα μεταξύ τους, ή $\to +$)

$$= P_{n-1}(t)\overset{\text{γέννηση}}{P_{n-1\,n}(dt)} + P_n(t)P_{nn}(dt) + P_{n+1}(t)\overset{\text{θάνατος}}{P_{n+1\,n}(dt)}$$

$$= P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}dt + O(dt)] + P_n(t)[1-(\mu_n+\lambda_n)dt + O(dt)] +$$
$$+ P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}dt + O(dt)]$$

$$\Rightarrow P_n(t+dt) - P_n(t) = P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}dt + O(dt)] + P_n(t)[-(\mu_n+\lambda_n)dt + O(dt)]$$
$$+ P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}dt + O(dt)]$$

$$\frac{P_n(t+dt)-P_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\left[\lambda_{n-1} + \frac{O(dt)}{dt}\right] - P_n(t)\left[(\mu_n+\lambda_n) + \frac{O(dt)}{dt}\right]$$

$$+ P_{n+1}(t)\left[\mu_{n+1} + \frac{O(dt)}{dt}\right]$$

(1) $\boxed{\frac{dP_n(t)}{dt} + (\mu_n+\lambda_n) P_n(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t)}$ $\boxed{n=1,2,3}$

$P_0(t+dt) = P_0(t)\,P_{00}(dt) + P_1(t)\,P_{10}(dt)$

$= P_0(t)\left[1-\lambda_0 dt + O(dt)\right] + P_1(t)\left[\mu_1 dt + O(dt)\right]$

$$\frac{P_0(t+dt)-P_0(t)}{dt} = -P_0(t)\left[\lambda_0 + \frac{O(dt)}{dt}\right] + P_1(t)\left[\mu_1 + \frac{O(dt)}{dt}\right]$$

(2) $\boxed{\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t)}$ $\boxed{n=0}$

Το σύστημα αυτό των διαφορικών εξισώσεων διαφορών 2ου βαθμού δεν λύνεται. Αποδεικνύεται όμως ότι υπάρχουν οι οριακές πιθανότητες ή αλλιώς ότι υπάρχουν οι πιθανότητες σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας

$$\bar{P}_n = \lim_{t\to+\infty} P_n(t)$$

Για την εύρεση τους θα χρησιμοποιήσω τις σχέσεις 1 και 2 με την παραδοχή ότι το όριο $\lim_{t\to\infty} \frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

$$\begin{cases} (\mu_n+\lambda_n)\bar{P}_n = \lambda_{n-1}\bar{P}_{n-1} + \mu_{n+1}\bar{P}_{n+1} & (3) \\ \lambda_0 \bar{P}_0 = \mu_1 \bar{P}_1 & (4) \end{cases}$$

$(4) \Rightarrow \boxed{\bar{P}_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\bar{P}_0}$

Η (3) για $n=1$ δίνει: $(\mu_1+\lambda_1)\bar{P}_1 = \lambda_0\bar{P}_0 + \mu_1\bar{P}_1 \xrightarrow{\bar{P}_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\bar{P}_0}$

$\Rightarrow \boxed{\bar{P}_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\bar{P}_0}$

$$\boxed{\bar{P}_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}\bar{P}_0}$$

$$\boxed{\bar{P}_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_0 \dots \mu_n} \bar{P}_0}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \bar{P}_i = 1 \Rightarrow \bar{P}_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1}\bar{P}_0 + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\bar{P}_0 + \dots = 1$$

$$\bar{P}_0 \left[1 + \sum^{+\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} \right] = 1$$

$$\boxed{\bar{P}_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} \right]^{-1}}$$

Παράδειγμα

Θεωρείστε ένα τηλεφωνικό κέντρο με m-γραμμές.
Η διάρκεια του τηλεφωνήματος ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ και οι κλήσεις με Poisson(λ).
Όταν ένας συνδρομητής βρίσκει όλες τις γραμμές κατειλημμένες τότε δεν μπορεί να μπει στο σύστημα και χάνεται.
Θέλουμε να προσδιοριστεί μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ποια η πιθανότητα κάποιος συνδρομητής να βρει όλες τις γραμμές κατειλημμένες.

ΛΥΣΗ: $X(t)$: $0 \le t < +\infty$ αριθμός των κατειλημμένων γραμμών τη χρονική στιγμή t με τιμές $\{0, 1, \dots m\}$

Ψάχνω την P_m.

$$\bar{P}_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \bar{P}_0 \qquad \text{για } n=m$$

$$\bar{P}_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \right] = 1$$

$\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_n$?

μ_n?

Ειδική περίπτωση $i = 1$ έως m $\qquad \mu_i = i\mu,\ i \le m$

$$P(\text{μια αφιξη σε χρόνο } dt) = \frac{(\lambda dt)^1}{1!} e^{-\lambda dt} = \lambda dt\, e^{-\lambda dt}$$

$$P(\text{μια αφιξη}) = \lambda dt \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda dt)^n}{n!} = \lambda dt + o(dt) \qquad \lambda_n = \lambda \text{ πάντα}$$